

# I<sup>2</sup>-NEXT 를 위한 증강 현실기반 감각형 사용자 인터페이스\*

홍동표, 우운택  
광주과학기술원 U-VR 연구실  
{dhong, wwoo}@gist.ac.kr

## AR-based Tangible User Interface for I<sup>2</sup>-NEXT

Dongpyo Hong, Woontack Woo  
GIST U-VR Lab.

### 요약

본 논문에서는 가상 공간과 상호작용 하기위한 증강 현실 기술에 기반한 감각형 사용자 인터페이스를 제안한다. 최근 증강 현실에 대한 관심이 증대되고, 이와 관련된 기술들이 발전함에 따라서 증강 현실 기술을 다양한 분야에 적용하려는 시도가 늘어나고 있다. 또한, 감각형 사용자 인터페이스는 사용자 인터페이스와 관련된 많은 연구에서 효과적인 사용자 인터페이스로 평가되고 있다. 제안된 사용자 인터페이스는 적외선 필터와 역반사체(retro-reflector)를 이용하여 시각 기반 증강 현실이 갖는 광원의 영향을 최소화하여 강건한 마커 추적이 가능하다. 따라서, 다양한 조명 조건에서도 충분히 상호작용이 가능하기 때문에 제안된 사용자 인터페이스는 다양한 가상 현실 시스템에 적용 가능하다. 제안된 사용자 인터페이스의 가상 공간과의 상호작용 방법은 마커와 카메라간의 3 차원 공간 정보 (마커와 카메라간의 거리와 회전 정도)를 계산하여 가상 객체를 선택하거나 가상 공간을 네비게이션하는 상호작용이다. 따라서, 제안된 증강 현실 기술에 기반한 감각형 사용자 인터페이스는 증강 현실 기술이 갖는 일방적인 정보 증강을 벗어나, 직접적인 객체 조작을 통해서 가상 현실과 상호작용을 할 수 있는 효과적인 방법이다.

Keyword : Virtual Reality, Augmented Reality, Vision-based User Interface, HCI

### 1. 소개

정보통신기술의 발전과 함께 문화 유적지의 디지털 복원에 대한 관심도 증대되고 있다. 다양한 정보통신 관련 기술중 가상 현실 기술은 문화 유적지를 디지털로 복원하는데 기반이 되는 기술중 하나로 학계나 산업계에서 각광받고 있다. 또한, 디지털로 복원된 가상의 문화 유적지를 가상 현실 기술 통해서 일반 대중에게 선보이기 위한 관련된 연구가 많은 곳에서 진행되고 있다 [1-5]. 이와 같은 이유는 가상 현실 기술이 대형 스테레오 디스플레이 장치나 다양한 사용자 인터페이스를 충분

히 활용하기 때문에 참여자에게 충분한 몰입감이 나 상호작용을 제공할 수 있다.

가상 공간과 상호작용을 하기위한 사용자 인터페이스와 관련된 연구에서는 조이스틱이나 wand (wand)와 같이 일반적인 사용자 인터페이스[1-3]의 한계를 극복하고, 제스처, 음성 및 센서등에 기반한 자연스러운 사용자 인터페이스를 제공하려는 연구가 진행되고 있다 [4-6]. 특히, 시각 기반 사용자 인터페이스는 음성이나 센서에 기반한 사용자 인터페이스들에 비해 비교적 보정과정이 용이하며, 자연스러운 상호작용을 제공하는 장점이 있다. 최

\* 본 연구는 광주과학기술원(GIST) 기관고유사업 지원에 의해 수행되었습니다

근 시각 기술에 기반한 증강 현실에 대한 관심이 증대되고, 이와 관련된 기술이 발전함에 따라서 증강 현실 기술을 다양한 응용 분야의 사용자 인터페이스로 활용하려는 연구가 활발히 진행 중이다. 특히, 증강 현실에 있어서 감각형 사용자 인터페이스의 활용은 사용자 인터페이스와 관련된 많은 연구에서 효과적인 사용자 인터페이스로 평가되고 있다 [7-9]. 하지만, 증강 현실 기술에 기반한 감각형 사용자 인터페이스를 가상 현실과 상호작용을 위한 사용자 인터페이스로 활용하려는 연구는 아직 미비하다.

본 논문에서는 사용자가 증강 현실 기술을 활용한 감각형 인터페이스를 이용하여 가상 현실과 상호작용할 수 있는 사용자 인터페이스를 제안한다. 제안된 방법에서는 적외선 필터와 역반사체(retro-reflector)를 이용하여 시각 기반 사용자 인터페이스가 갖는 광원의 영향을 최소화하여 강건한 마커 추적이 가능하다 [10]. 일반적으로 시각 기반 증강 현실 기술에서는 광원의 영향에 민감하기 때문에 강건한 마커 추적을 위해서 광원의 상태를 항상 일정하게 유지하도록 한다. 하지만, 대부분의 가상 현실 시스템에서는 사용자에게 몰입감을 제공하기 위해서 광원의 사용을 가능한 최소화하려고 한다. 따라서, 제안된 방법은 다양한 조명 조건 상태에서도 충분히 사용가능하기 때문에 다양한 가상 현실 시스템에 사용 가능하다. 그리고, 제안된 사용자 인터페이스의 상호작용은 사용자가 마커가 부착된 감각형 객체를 직접 조작하여 자신이 원하는 가상의 객체를 선택하거나 선택한 가상의 객체를 통해서 가상 공간을 네비게이션하는 상호작용이다. [10-12]. 특히, 가상 공간과 상호작용에 있어서 가상의 객체를 선택하거나 조작하는 것과 가상 공간을 네비게이션하는 것은 사용자가 가상 공간에서 할 수 있는 중요한 상호작용들이다. 제안된 상호작용 방법은 마커와 카메라간의 3 차원 정보(마커와 카메라 간의 상대적인 거리와 회전 정도)를 계산하여 가상 공간과 상호작용하는 방법이다. 따라서, 제안된 증강 현실 기술에 기반한 감각형 사용자 인터페이스는 증강 현실 기술이 갖는 일반적인 정보 증강을 벗어나, 직접적인 객체 조작을 통해

서 가상 현실과 상호작용을 할 수 있는 효과적인 방법이다. 그리고, 제안된 사용자 인터페이스의 유용성을 검증하기위해서 본 연구실에서 연구 개발 중인 네트워크 환경에서 사용자의 문화적 감정을 상호작용적으로 표현할 수 있는 I<sup>2</sup>-NEXT 로 구축된 가상 공간의 사용자 인터페이스로써 실험하고 있다 [5]. I<sup>2</sup>-NEXT 로 구축된 가상 공간은 사용자가 가상 공간에서 문화적 체험을 할 수 있는 가상 현실 시스템이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 제안된 감각형 사용자 인터페이스를 위한 마커 제작과 카메라를 이용한 상호작용 방법에 대해서 자세히 소개한다. 3 장에서는 제안된 사용자 인터페이스를 활용한 실험 결과를 기술하고, 4 장에서는 제안된 방법에 대한 결론과 향후 과제에 대해서 언급한다

## 2. 증강 현실 기반 감각형 사용자 인터페이스

그림 1 은 I<sup>2</sup>-NEXT 에서 사용된 제안된 증강 현실 기반 감각형 사용자 인터페이스이다.

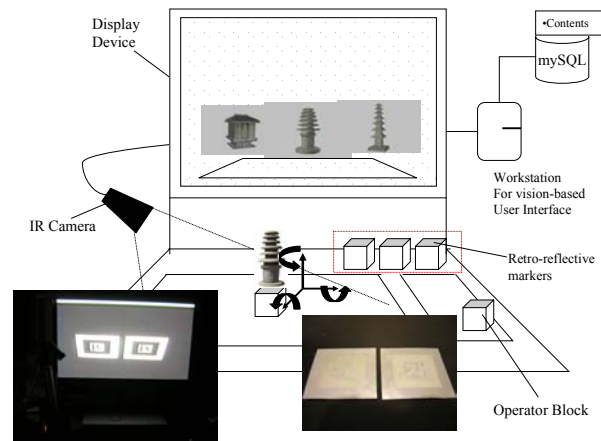
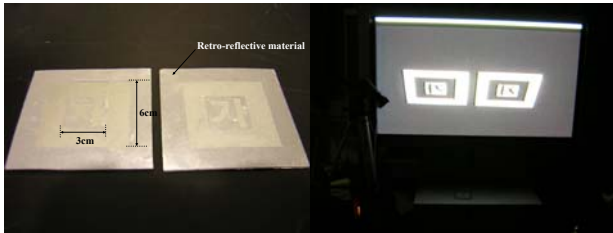


그림 1. 제안된 감각형 사용자 인터페이스

사용자는 I<sup>2</sup>-NEXT 로 구축된 가상 공간과 상호작용하기 위해서 그림 1 과 같이 제안된 사용자 인터페이스를 사용 한다. 제안된 사용자 인터페이스는 그림 1 에서처럼 적외선 필터와 적외선 방사체가 장착된 카메라, 역반사체 마커를 이용한 감각형 객체 그리고 디스플레이 장치로 구성된다. 제안된 사용자 인터페이스의 각 구성 요소에 대한 설명과 동작 원리는 다음 각 절에서 자세히 기술한다.

## 2.1 마커 제작

본 논문에서는 시각 기반 증강 현실 기술의 한 계인 광원의 간섭을 최소화하기 위해서 적외선 필터와 적외선 방사체를 장착한 카메라와 역반사체를 이용한 마커를 사용한다. 그림 2 는 다양한 조명 조건 상태에서 마커 인식이 가능하도록 제작된 마커를 보여준다.



(가) (나)

그림 2. 제작된 마커

그림 2(가)와 같이 역반사체를 이용해 제작된 마커는 육안으로 마커를 쉽게 구분하기는 힘들다. 하지만, 그림 2 (나)에서 처럼 적외선 필터를 사용할 경우에는 감각형 객체에 사용된 특정 마커를 쉽게 구분 할 수 있다. 따라서, 제안된 마커는 다양한 조명 조건에서 활용 가능할뿐만 아니라, 일반적으로 마커 기반의 증강 현실 기술에서 마커가 명시적으로 사용자에게 보임으로써 사용자에게 주는 거부감을 해소 할 수 있다. 따라서, 제작된 마커는 몰입감 있는 가상 현실 시스템에 충분히 활용 가능 하다.

## 2.2 카메라와 마커간의 3 차원 정보 계산

제안된 사용자 인터페이스는 3 차원 공간에서 카메라와 마커 간의 3 차원 정보 (이동과 회전 행렬)를 이용하여 가상 공간과 상호작용한다. 따라서, 제안된 사용자 인터페이스를 이용해서 가상 공간과 상호작용 하기 위해서는 카메라와 마커 간의 3 차원 정보 획득을 위한 기본적인 카메라 보정 과정이 필요하다 [13]. 본 논문에서는 ARToolkit 에서 제공하는 카메라 보정 기법을 사용하여 마커와 카메라간의 3 차원 정보를 식(1)과 같이 획득한다 [14]. 그림 3 은 식(1)을 유도하기 위한 카메라와 마커의 좌표계간의 관계를 나타내는 그림이다.

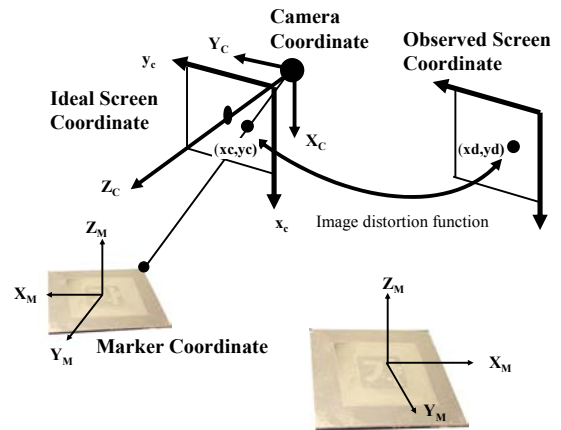


그림 3. 마커와 카메라 좌표계

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \\ 1 \end{bmatrix}$$

식(1)에서  $X_M, Y_M, Z_M$  은 그림 3 에서 처럼 마커의 좌표축을 나타내며,  $X_C, Y_C, Z_C$  는 카메라의 좌표축을 나타낸다. 그리고,  $R_{3 \times 3}$  은 회전행렬<sup>1</sup>을  $T_{3 \times 1}$  은 이동 행렬을 각각 나타낸다. 식(1)에서 처럼 카메라로부터 마커의 이동 거리는 각 축에 대한 회전 각보다 상대적으로 계산하기가 용이하다. 하지만, 마커의 각 축에 대한 회전 각을 구하기 위해서는 별도의 식이 필요하다.

제안된 사용자 인터페이스는 식(1)에서 구한  $R_{3 \times 3}$  행렬과  $T_{3 \times 1}$  로 부터 마커의 각  $X, Y, Z$  축에 대한 회전 각과 이동 거리를 이용해서 가상의 객체와 상호작용하기 때문에 마커의 각  $X, Y, Z$  축에 대한 상대적 이동 거리와 회전 각을 계산해야 한다. 앞에서 언급했듯이 마커와 카메라 간의 거리는 비

<sup>1</sup> ARToolkit 에서  $R_{3 \times 3}$  회전 행렬을 Euler Angle 표현중 YZY 표현 방법으로 구현되어 있다. 따라서, ARToolkit 에서 제공하는 arGetAngle 함수는 제안된 사용자 인터페이스에서 처럼 마커의 각  $X, Y, Z$  축에 대한 회전 각을 이용하여 상호작용하는데 사용하기에는 부적합하다.

교적 쉽게 계산할 수 있지만, 마커의 각  $X, Y, Z$  축에 대한 회전 각을 계산 하기위해서 식(2)와 같이 롤(Roll), 피치(Pitch), 요(Yaw) 각도 표현 방법을 이용한다 [15].

$$R_{3 \times 3} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \quad (2)$$

where  $c = \cos, \quad s = \sin$

식(2)에서 구한 회전 행렬은 마커의  $X, Y, Z$  축에 대한 연속적인 회전의 곱으로 표현 된다. 주어진 식(1)과 (2)로 부터 마커의 각  $X, Y, Z$  축에 대한 회전 각을 식(3)과 같이 구할 수 있다.

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{R_{32}}{\cos\theta}\right)$$

$$\theta = -\sin^{-1}(R_{31})$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{R_{21}}{\cos\theta}\right) \quad (3)$$

식(3)에서 보듯이 제안된 사용자 인터페이스에서는  $\cos\theta \neq 0$  조건을 만족시키기위해서 마커의  $Y$  축에 대한 회전을  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$  로 제한한다. 이는 카메라로부터 마커의 회전이  $-90^\circ$  이하이거나  $+90^\circ$  이상일 경우에는 마커를 인식하지 못하기 때문이다. 뿐만 아니라, 이와 같은 조건은  $R_{3 \times 3}$  회전 행렬의 모든 원소를 연립 방정식으로 풀어야하는 계산 복잡도를 줄일 수 있다.

### 2.3 마커를 통한 가상 환경과의 상호작용

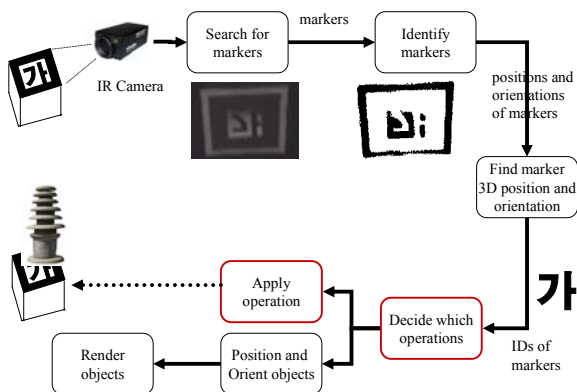


그림 4. 제안된 상호작용 알고리즘

제안된 사용자 인터페이스는 식(1)-(3)를 통해서 계산된 마커와 카메라간의 3 차원 정보를 이용해서 가상 공간과 상호작용 한다. 그림 4 는 본 논문에서 제안된 사용자 인터페이스의 전체적인 상호작용 알고리즘을 나타낸 그림이다. 그림 4 에서 보듯이 ARToolkit 에서 제공하는 증강 알고리즘과 제안된 사용자 인터페이스를 활용한 상호작용 알고리즘은 유사하지만, 특정 마커를 통해서 상호작용할 수 있도록 변형하였다.

표 1 은 제안된 사용자 인터페이스에서 사용되는 상호작용을 나타낸다.

표 1. 마커에 따른 가상공간과의 상호작용

마커	상호작용	설명
	로더	사용자는 로더 마커 X 축의 회전각도와 Z 축의 거리 변화를 이용하여 데이터베이스에 있는 가상의 객체를 보면서 사용자가 원하는 가상의 객체를 선택할 수 있다.
	네비게이션	사용자는 로더 마커를 이용해 선택한 가상의 객체를 네비게이션 마커위에 증강시킨 상태로 가상 공간을 네비게이션할 수 있다.

표 1 에서처럼 제안된 사용자 인터페이스는 가상 공간과의 상호작용에 사용되는 일반적인 기능을 제공한다. 즉, 사용자는 단순히 마커를 회전 혹은 이동함으로써 가상의 객체를 선택하거나 가상공간을 네비게이션할 수 있다.

그림 5 는 로더 마커를 이용해서 원하는 가상 객체를 선택하는 경우를 보여준다.

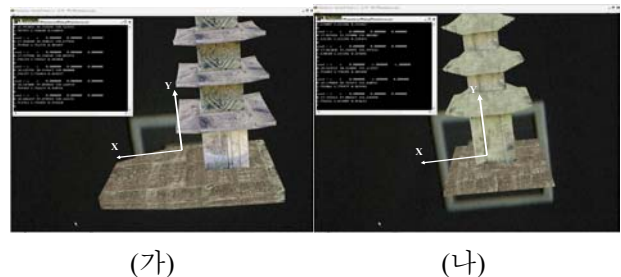


그림 5. 마커 조작에 따른 가상 객체 선택

그림 5 처럼 사용자는 로더 마커를 이용하여 그림 5(가)에서 그림 5(나)로 가상 객체를 변경할 수 있다. 이는 그림 3 에서 보여진 로더 마커의  $X$  축에

대해서 특정 각도 이상의 회전과 카메라로부터 로더 마커의 Z 축에 대한 거리가 특정 값을 넘으면 데이터베이스에 있는 다음 가상 객체를 로딩하도록 한다. 따라서, 사용자는 가상 객체를 보면서 원하는 객체를 선택하거나, 선택된 가상 객체를 보면서 가상 공간을 네비게이션할 수 있다.

### 3. 실험결과

그림 6 는 제안된 사용자 인터페이스를 위해 제작된 마커가 다양한 조명 조건 상태에서도 인식되는 것을 보여주는 그림이다.

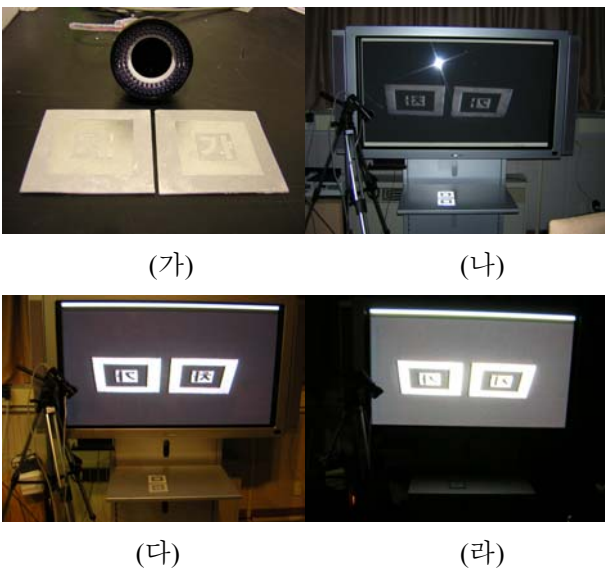


그림 6. 조명 조건에 따른 마커의 인식. (가) 제작된 마커와 사용된 적외선 필터 (나) 밝은 조명 조건 (다) 적당히 어두운 조명 조건 (라) 아주 어두운 조명 조건

그림 6 에서 보듯이 제작된 마커는 다양한 조명 조건에서도 강건하게 인식됨을 알 수 있다. 따라서, 제안된 사용자 인터페이스는 일반적으로 시각 기반 사용자 인터페이스가 갖는 조명의 간섭을 최소화할 수 있을 뿐만 아니라, 가상 환경과 같이 사용자에게 몰입감을 부여해야 하는 시스템에 활용가능 하다. 또한, 전시장과 같이 광원의 조건을 알 수 없는 경우에도 능동적으로 대처할 수 있는 사용자 인터페이스이다.

그림 7 은 제작된 마커와 카메라간의 3 차원 정보 계산중 마커의 X, Y, Z 축 각각에 대해서 회전했을때 각 축에 대한 회전 각도를 평균 오차로 표현한 그래프이다.

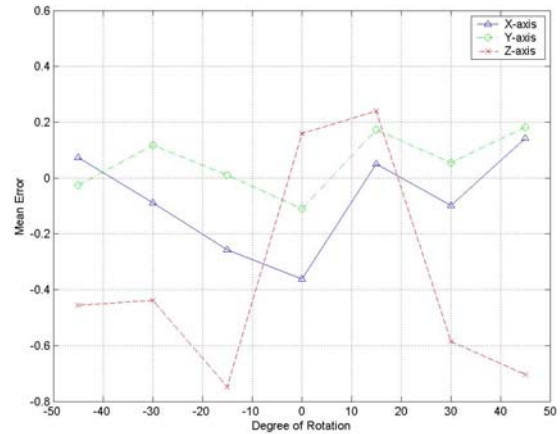


그림 7. 마커의 각 축에 대한 회전 각도의 평균 오차 그래프

그림 7 에서 보듯이 각 축에 대한 회전 각의 측정 구간은  $-45^{\circ}$  에서  $+45^{\circ}$  사이에서 측정하였다. 이는 카메라와 마커간의 회전 각이 각 축에 대해서  $\pm 45^{\circ}$  이상 될 경우에는 ARToolkit 에서 마커 추적이 강건하지 못했기 때문이다. 그림 7 의 실험 결과에서 보듯이 각 축에 대한 회전 각도의 오차 범위는  $-0.75 \leq \text{mean error}(X,Y,Z) \leq +0.24$  이다. 따라서 마커의 회전 각도를 정확하게 구하는데는 다소 오차가 있지만, 오차의 범위가  $\pm 1^{\circ}$  정도의 범위 이내임으로 회전 각을 상호작용하기 위한 파라미터로 사용하기에는 충분함을 알 수 있다. 또한, 특정 구간에서 오차가 큰 것을 볼 수 있는데, 이는 역반사체와 카메라간의 각도와 적외선 방사체의 적외선 강도와 관계가 있음을 알 수 있었다. 하지만, 본 논문에서는 ARToolkit 에서 제공하는 카메라 보정 알고리즘을 사용하였기때문에 식(1)에서 구한  $R_{3 \times 3}$  회전 행렬과  $T_{3 \times 1}$  이동 행렬에 대한 오차는 분석하지 않았다. 보다 정확한 회전 각도를 계산하기 위해서는 새로운 카메라 보정 알고리즘이 필요하다.

그림 8 은 제안된 사용자 인터페이스를 I<sup>2</sup>-NEXT 에 적용된 예를 보여준다. 그림 8 에서처럼 사용자는 로더 마커를 이용하여 사용자가 원하는 가상의 객체를 선택하고, 네비게이션 마커를 이용하여 선택한 객체를 보면서 가상 공간과 상호 작용할 수 있다. 따라서, 제안된 사용자 인터페이스는 I<sup>2</sup>-NEXT 와 같이 몰입감있는 가상 공간 시스템에 충

분히 활용 가능하다.



그림 8. I<sup>2</sup>-NEXT에서 활용된 예

#### 4. 결론 및 추후과제

본 논문에서는 시각 기반 증강 현실 기술을 활용한 사용자 인터페이스와 상호작용 기법을 제안하였다. 제안된 사용자 인터페이스는 일반적인 시각 기반 인터페이스의 단점인 광원 문제를 극복하고, 감각형 객체 조작을 통한 실시간 사용자 상호작용을 가능하게 하였다. 뿐만아니라, 제안된 방법은 증강 현실 기술이 갖는 일방적인 정보 증강을 벗어나 상호작용을 할 수 있도록 하였다. 제안된 사용자 인터페이스는 사용자에게 자연스러운 상호작용을 제공하지만, 감각형 객체를 인식하기 위한 마커의 크기와 카메라의 위치에 따른 상호작용할 수 있는 공간의 범위가 다소 제약적이다. 따라서, 상호작용의 범위를 확대하기 위한 적절한 형태의 감각형 객체 제작이 필요하다. 뿐만 아니라, 보다 자연스러운 상호작용을 제공하기 위해서는 정확한 카메라의 위치를 추적할 수 있는 카메라 보정 방법이 요구된다.

#### 참고문헌

[1] Yong-moo Kwon, Ig-Jae Kim, Sang Chul Ahn, Heedong Ko, Hyoung-Gon Kim, "Building a 3D Virtual Museum", In Proc. Virtual Systems and MultiMedia (VSMM 2002), pages 291 - 299, September, Kyoungju, Korea

[2] Meehae Song, Thomas Elias, Wolfgang Müller-Wittig, Tony K.Y. Chan, "Interacting with the Virtually Recreated Peranakans", International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and South East Asia, 11-14 February 2003, Melbourne,

Australia.

[3] Gaitatzes, A., Christopoulos, D., & ROUSSOU, M., "Reviving the Past: Cultural Heritage Meets Virtual Reality." In S. Spencer (Ed.) Proc. of VAST 2001: Virtual Reality, Archaeology and Cultural Heritage (VAST'01), ACM SIGGRAPH, ISBN 1-58113-447-9, pp.103-110.

[4] Dongpyo Hong, Wonwoo Lee, Jaeheon Jeong, Jongwon Kim, Woontack Woo, "I-NEXT: An Interactive Networked Expression eXperience Testbed," Ninth International Conference on Virtual Systems and MutilMedia (VSMM03), pp. 455-462, 2003.

[5] Dongpyo Hong and Woontack Woo, "I<sup>2</sup>-NEXT: Digital Heritage Exp", 14th International Conference on Artificial Reality and Telexistence (ICAT04), pp.120-125, 2004.

[6] D.Hong and W.Woo, "SpaceSensor:Real-Time Gesture Tracking for I-NEXT," International Conferece on Artificial Reality and Telexisitence(ICAT03), paper ISSN 1345-1278, pp. 95-99, 2003

[7] Azuma, Ronald T. A Survey of Augmented Reality. Presence: Teleoperators and Virtual Environments 6, 4 (August 1997), 355 – 385.

[8] H. Ishii, B. Ullmer, "Tangible Bits: Towards Seamless Interfaces between People, Bits and Atoms, " in Proceedings of Conference on Human Factors in Computing Systems (CHI '97), ACM Press, pp. 234-241, Mar. 1997.

[9] M. Fjeld, F. Voorhorst, M. Bichsel, K. Lauche, M. Rauterberg & H. Krueger (1999): Exploring Brick-Based Navigation and Composition in an Augmented Reality. In H.-W. Gellersen (ed.) Handheld and Ubiquitous Computing (HUC 99), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1707. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 102-116.

[10] J. Davis and A. Bobick, "A Robust Human-Silhouette Extraction Technique for Interactive Virtual Environments", In Lecture Notes in Artificial Intelligence (Ed. by N. Magnenat-Thalmann & D. Thalmann), 1537, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, pp. 12-25.

[11] Hannah Slay, Bruce Thomas, Rudi Vernik, "Tangible User Interaction Using Augmented Reality", Australian Computer Science Communications, Volume 24, Issue 4 January-February 2002. Pages: 13 – 20.

[12] M. Fjeld, F. Voorhorst, M. Bichsel, H. Krueger & M. Rauterberg (2000): Navigation Methods for an Augmented Reality System. In the video program / extended abstracts of CHI 2000, ACM, pp. 8-9.

[13] Hirokazu Kato, Mark Billinghurst:Marker Tracking and HMD Calibration for a Video-based Augmented Reality Conferencing System, Proc. of 2nd Int. Workshop on Augmented Reality, pp.85-94, 1999

[14] <http://www.hitl.washington.edu/artoolkit/download.htm>.

[15] Mark W. Spong and M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, Inc., pp. 45-46, pp. 103-105, 1989.